3. Крылов А. Н. *Вибрация судов*, (изд. 2). – М., 2012. – 447 с.

4. Гулд С. *Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна*. – М.: Мир, 1970. – 328 с.

5. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании*. – М.: Стройиздат, 1965. – 232 с.

6. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

7. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

8. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин*. – Днепропетровск: Приднепровская гос. академия стр. и арх., 2010. – 216 с.

9. Сабитов К. Б. *Начальная задача для уравнения колебаний балки*. – 2017. – Т. 53. – № 5. – С. 665–671.

10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики*. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

11. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки* // В сб.: Матем. методы и модели в стр., арх. и дизайне. Самарский гос. арх.-стр. унив. – Самара, 2015. – С. 34–42.

12. Сабитов К. Б. *Колебания балки с заделанными концами* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 2 (39). – С. 311–324.

13. Сабитов К. Б. *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок* // Дифф. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 1. – С. 89–100.

INITIAL-BOUNDARY AND INITIAL PROBLEMS FOR THE EQUATION OF OSCILLATIONS OF A BEAM

K.B. Sabitov

For the equation of oscillations of a finite beam, the initial-boundary problems and the initial problem for an infinite beam are studied. The solutions of the problems are constructed in an explicit form, and the corresponding uniqueness and existence theorems in the class of regular solutions are proved.

Keywords: beam equation, initial-boundary value problems, initial problem, spectral method, uniqueness, existence, series, stability.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Ю.К. Сабитова[1]

1 *sabitovauk@rambler.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

В статье построено решение первой граничной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области и доказана ее единственность. Решение получено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, задача Дирихле, критерий единственности.

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{tt} - b_1(t)u(x, d_1) = 0, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - b_2(t)u(x, d_2) = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в $D = \{(x, t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β, d_1, d_2 – заданные положительные действительные числа, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – заданные непрерывные функции, $b_1(0+0) = b_1(0)$, $b_2(0-0) = b_2(0)$, $b_1(0)$ и $b_2(0)$ не связаны никакими условиями.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\, t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D_+ \cup D_-\right); \tag{2}$$

$$Lu(x,\, t) \equiv 0, \quad (x,\, t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,\, t) = u(1,\, t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u\left(x,\, \beta\right) = \varphi(x)\,, u(x, -\alpha) = \psi(x)\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Опираясь на работы [1] – [3], построим решение задачи (2) – (5) и докажем ее единственность. Пусть $u(x, t)$ – решение задачи (2) – (5). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x, t)\sin\lambda_k x dx, \tag{6}$$

где $\lambda_k = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. На основании (6) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x, t)\sin\lambda_k x dx, \tag{7}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (7) по t два раза при $t \in (-\alpha, 0) \cup \left(0, \beta\right)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{k,\varepsilon}(t) = -\sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx - \sqrt{2}b_1(t)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, d_1)\sin\lambda_k x dx, \quad t > 0; \tag{8}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx + \sqrt{2}b_2(t)\int\limits_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x, -d_2)\sin\lambda_k x dx, \quad t < 0. \tag{9}$$

Интегрируя в правых частях равенств (8) и (9) по частям два раза в интегралах, содержащих u_{xx}, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом однородных граничных условий (4), получим

$$u''_k(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = -b_1(t)\, u_k(d_1)\,, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$u''_k(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = -b_2(t)\, u_k(-d_2)\,, \quad t < 0. \tag{11}$$

Дифференциальные уравнения (10) и (11) являются нагруженными и они имеют общие решения

$$u_k(t)=\begin{cases} c_k e^{\lambda_k t}+d_k e^{-\lambda_k t}-\dfrac{u_k(d_1)}{\lambda_k}b_{1k}(t), & t>0,\\ a_k\cos\lambda_k t+b_k\sin\lambda_k t-\dfrac{u_k(-d_2)}{\lambda_k}b_{2k}(t), & t<0,\end{cases} \tag{12}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные, $u_k(0+0)$, $u_k(0-0)$, $u_k(d_1)$ и $u_k(-d_2)$ – пока неизвестные постоянные,

$$b_{1k}(t)=\int\limits_0^t b_1(s)\,\mathrm{sh}\,[\lambda_k(t-s)]\,ds,\quad b_{2k}(t)=\int\limits_t^0 b_2(s)\sin[\lambda_k(s-t)]\,ds.$$

Теперь, исходя из формулы (12), вычислим:

$$u_k(0+0)=c_k+d_k,\quad u_k(0-0)=a_k, \tag{13}$$

$$u_k(d_1)=\frac{c_k\lambda_k e^{\lambda_k d_1}+d_k\lambda_k e^{-\lambda_k d_1}}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},\quad u_k(-d_2)=\frac{a_k\lambda_k\cos\lambda_k d_2-b_k\lambda_k\sin^{\lambda_k d_2}}{\lambda_k-b_{2k}(-d_2)}, \tag{14}$$

когда при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\lambda_k+b_{1k}(d_1)\neq 0,\quad \lambda_k-b_{2k}(-d_2)\neq 0. \tag{15}$$

Для функций (12) в силу (2) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0)=u_k(0-0),\, u'_k(0+0)=u'_k(0-0). \tag{16}$$

Условия (21) имеют место только в том случае, когда

$$c_k=\frac{a_k+b_k}{2},\quad d_k=\frac{a_k-b_k}{2}. \tag{17}$$

Подставляя (13), (14) в (12), получим

$$u_k(t)=\begin{cases} a_k M_{1k}(t)+b_k M_{2k}(t), & t>0,\\ a_k N_{1k}(t)+b_k N_{2k}(t), & t<0,\end{cases} \tag{18}$$

где

$$M_{1k}(t)=\mathrm{ch}\,\lambda_k t-\frac{\widetilde{M}_{1k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \widetilde{M}_{1k}=\frac{\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$M_{2k}(t)=\mathrm{sh}\,\lambda_k t-\frac{\widetilde{M}_{2k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \widetilde{M}_{2k}=\frac{\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$N_{1k}(t)=\cos\lambda_k t+\frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \widetilde{N}_{1k}=\frac{\lambda_k\cos\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(d_2)},$$

$$N_{2k}(t)=\sin\lambda_k t-\frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \widetilde{N}_{2k}=\frac{\lambda_k\sin\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(d_2)}.$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (6):

$$u_k\left(\beta\right)=\sqrt{2}\int_0^1 u\left(x,\beta\right)\sin\lambda_k x dx=\sqrt{2}\int_0^1 \varphi\left(x\right)\sin\lambda_k x dx=\varphi_k, \tag{19}$$

$$u_k\left(-\alpha\right)=\sqrt{2}\int_0^1 u\left(x,-\alpha\right)\sin\lambda_k x dx=\sqrt{2}\int_0^1 \psi\left(x\right)\sin\lambda_k x dx=\psi_k. \tag{20}$$

Удовлетворяя функции (24) к граничным условиям (19) и (20), найдем

$$\begin{cases} a_k M_{1k}(\beta)+b_k M_{2k}(\beta)=\varphi_k, \\ a_k N_{1k}(-\alpha)+b_k N_{2k}(-\alpha)=\psi_k. \end{cases} \tag{21}$$

Если определитель системы (21) при всех $k\in\mathbb{N}$:

$$\Delta(k)=N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(\beta)-N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(\beta)=(\cos\lambda_k\alpha+\frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha))M_{2k}(\beta)+$$

$$+(\sin\lambda_k\alpha+\frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha))M_{1k}(\beta)=M_{2k}(\beta)\cos\lambda_k\alpha+M_{1k}(\beta)\sin\lambda_k\alpha+$$

$$+\frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha)M_{2k}(\beta)+\frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha)M_{1k}(\beta)\neq 0, \tag{22}$$

то она имеет единственное решение

$$a_k=\frac{1}{\Delta(k)}[\psi_k M_{2k}(\beta)-\varphi_k N_{2k}(-\alpha)],\quad b_k=\frac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k N_{1k}(-\alpha)-\psi_k M_{1k}(\beta)]. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (24), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t)=\begin{cases} \frac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k \tilde{N}_{\alpha k}(t)+\psi_k D_{\beta k}(t)], & t>0, \\ \frac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k A_{\alpha k}(t)+\psi_k B_{\beta k}(t)], & t<0, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$C_{\alpha k}(t)=N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(t)-N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(t),\quad D_{\beta k}(t)=M_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-M_{2k}(\beta)M_{2k}(t),$$

$$A_{\alpha k}(t)=N_{1k}(-\alpha)N_{2k}(t)-N_{1k}(t)N_{2k}(-\alpha),\quad B_{\beta k}(t)=N_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-N_{2k}(t)M_{1k}(\beta).$$

Пусть $u\left(x,y\right)$ – решение однородной задачи (2) – (5) (где $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0$) и выполнены условия (22) при всех $k\in\mathbb{N}$. Тогда $\varphi_k=\psi_k\equiv 0$ и из формул (24) и (6) следует, что при любом $t\in\left[-\alpha,\beta\right]$

$$\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx=0,\quad k=1,2,\dots\ . \tag{25}$$

Из равенств (25) в силу полноты системы $\left\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\right\}$ в пространстве $L_2\,[0,1]$ следует, что $u\,(x,\,t) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in \left[-\alpha,\beta\right]$. Поскольку в силу (2) функция $u\,(x,\,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u\,(x,\,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Если при некотором $k = p$ $\Delta(p) = 0$ однородная задача (2) – (5) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t) = \widetilde{u}_p(t)\sin\lambda_p x,$$

где $\widetilde{u}_p(t)$ определяется по формуле

$$\widetilde{u}_p\,(t) = \begin{cases} \widetilde{A}_p[M_{1k}(t)M_{2k}(\beta) - M_{1k}(\beta)M_{2k}(t)], & t > 0, \\ \widetilde{A}_p[N_{1k}(t)M_{2k}(\beta) - M_{1k}(\beta)N_{2k}(t)], & t < 0, \end{cases} \tag{26}$$

Решение задачи (2) – (5) при выполнении условий (22) определяется рядом

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x,$$

где $u_k(t)$ находятся по формуле (24).

Теорема. *Если существует решение задачи* (2) – (5) *и выполнены условия* (15)*, то для его единственности, необходимо и достаточно, выполнение условий* (22) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Литература

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение*. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

2. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 6. – С. 31–42.

3. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // Изв. вузов. Математика. – 2013. – № 7. – С. 62–76.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A LOADED EQUATION
WITH THE OPERATOR OF LAVRENTYEV–BITSADZE

Yu.K. Sabitova

In this paper the solution of the boundary problem for loaded equation of the mixed type in a rectangle area is constructed and uniqueness is proved. The solution is obtained in the form of series by the system of functions of the corresponding one-dimenshional spectral problem.

Keywords: loaded equation, Dirichlet problem, criterion of uniqueness.